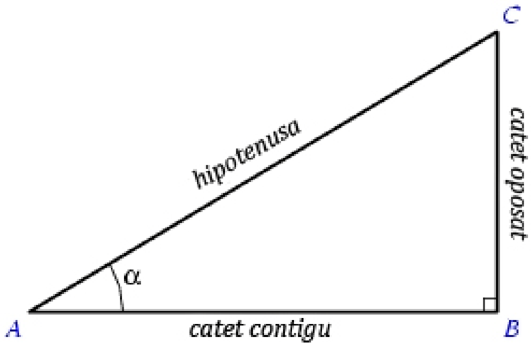
RESOLUCIÓ DE TRIANGLES

Raons trigonomètriques

$\sin\alpha = \dfrac{\text{c. oposat}}{\text{hip}} \rightarrow \text{c. oposat} = \text{hip} \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{c. contigu}}{\text{hip}} \rightarrow \text{c. contigu} = \text{hip} \cdot \cos\alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{c. oposat}}{\text{c. contigu}} = \dfrac{\text{hip} \cdot \sin\alpha}{\text{hip} \cdot \cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



Relacions fonamentals de la trigonometria

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}\,\boldsymbol{\alpha}} = 1 + \tan^2\alpha$ [ja que] $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = (\dfrac{\sin\ \alpha}{\cos\alpha})^2 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathbf{tan^2}\,\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{1}$

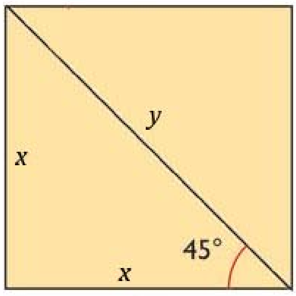
Raons trigonomètriques dels angles de 45, 60 i 30 graus

Podem trobar les raons trigonomètriques de l'angle de 45 graus a partir d'un quadrat de costat *x*.

$y^2 = x^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{2x^2} \quad \rightarrow \quad y = x\sqrt{2}$

$\sin 45° = \dfrac{x}{x\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 45° = \dfrac{x}{x\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45° = \dfrac{x}{x} = 1$

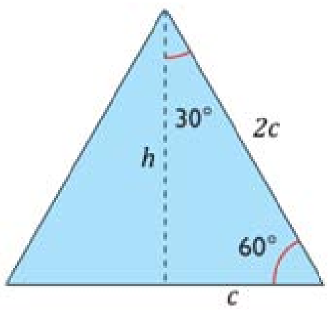


D'aquesta manera, també podem deduir les de 60 i 30 a partir d'un triangle equilàter.

$h^2 + x^2 = (2x)^2 \rightarrow h = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$

$\sin 60° = \dfrac{x\sqrt{3}}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60° = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$



$\sin 30° = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$ $\cos 30° = \dfrac{x\sqrt{3}}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

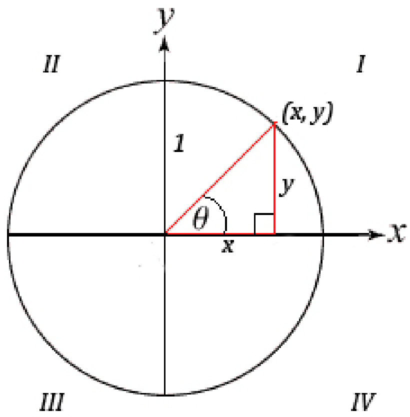
Raons trigonomètriques d'angles qualssevol (0º a 360º)

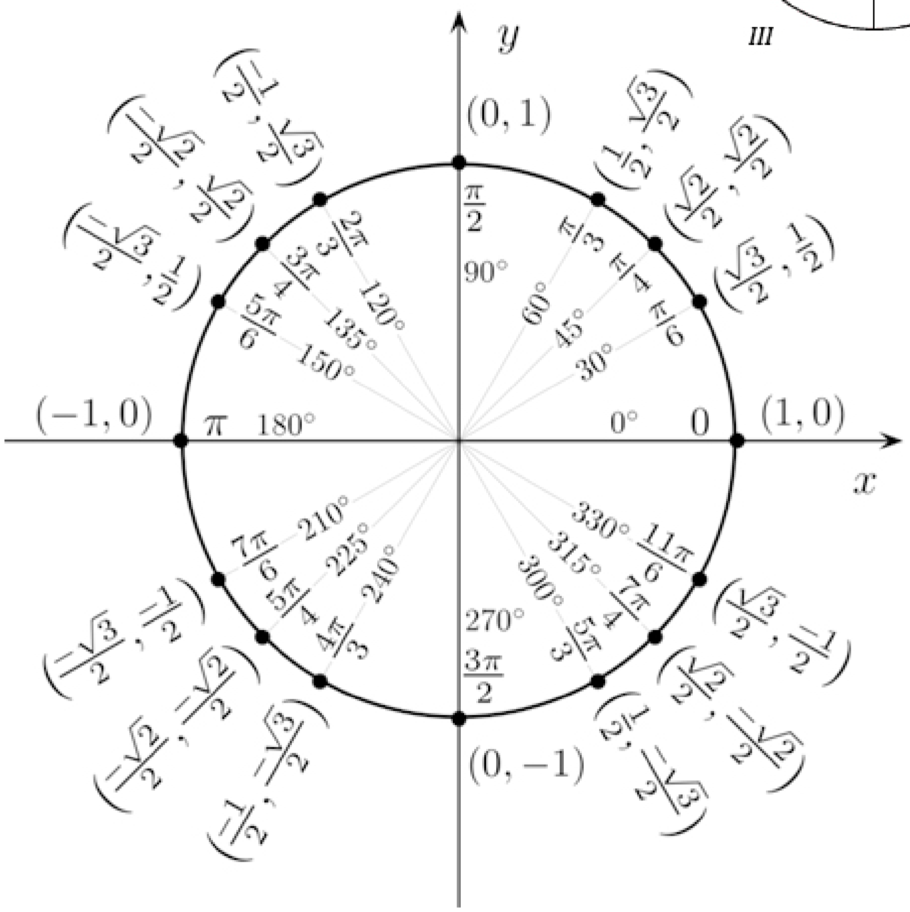
A partir de la circumferència goniomètrica (circumferència de radi 1) i les raons trigonomètriques dels angles de 45, 30 i 60 graus podem determinar les raons trigonomètriques dels angles més comuns. El sistema de coordenades (x, y) el podem representar en funció de (cos α , sin α) ja que:

$\sin\theta = \dfrac{y}{1} = y$ $\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$ $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

Una vegada sabem aquestes relacions, podem fixar el valor (positiu o negatiu) de les funcions trigonomètriques. La tangent és el quocient entre el sinus i el cosinus.

	I	II	III	IV
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tan α	+	-	+	-





Relacions entre angles del primer quadrant

ANGLES COMPLEMENTARIS

$\sin\alpha = \cos(90 - \alpha)$

$\cos\ \alpha = \sin(90 - \alpha)$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan(90 - \alpha)}$

TERCER I PRIMER QUADRANT

$\sin\alpha = -\sin(180 + \alpha)$

$\cos\alpha = -\cos(180 + \alpha)$

$\tan\alpha = \tan(180 + \alpha)$

ANGLES SUPLEMENTARIS

$\sin\alpha = \sin(180 - \alpha)$

$\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan(180 - \alpha)$

QUART I PRIMER QUADRANT

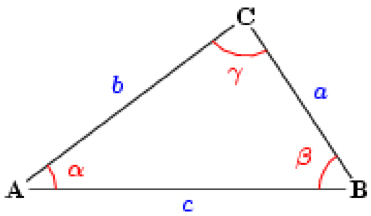
$\sin\alpha = \ -\sin(360 - \alpha)$

$\cos\alpha = \cos(360 - \alpha)$

$\tan\alpha = -\tan(360 - \alpha)$

Teorema del sinus en triangles qualssevol

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

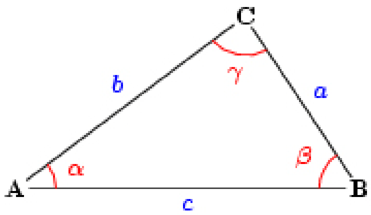


Teorema del cosinus en triangles qualssevol

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

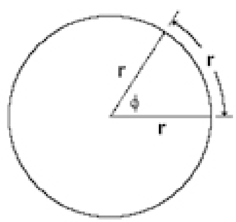


FUNCIONS I FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES

Radians

El radian és una unitat de mesura d'angles, tal que l'arc que forma l'angle té la mateixa longitud que el radi de la circumferència.

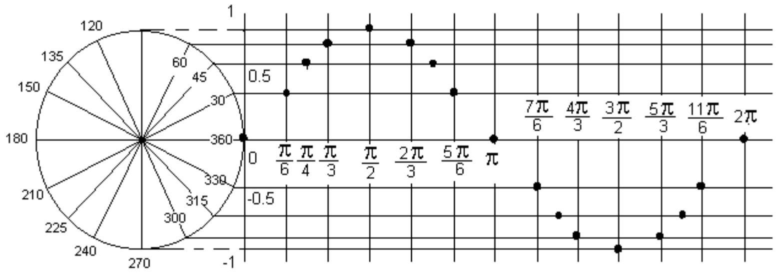
La relació és : $360^o = 2\pi$ radians ó $180^o = \pi$ radians



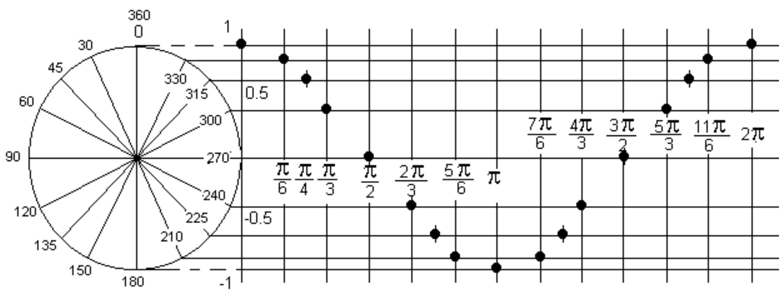
Relacions entre radians, graus i les funcions trigonomètriques respectives

Graus	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0

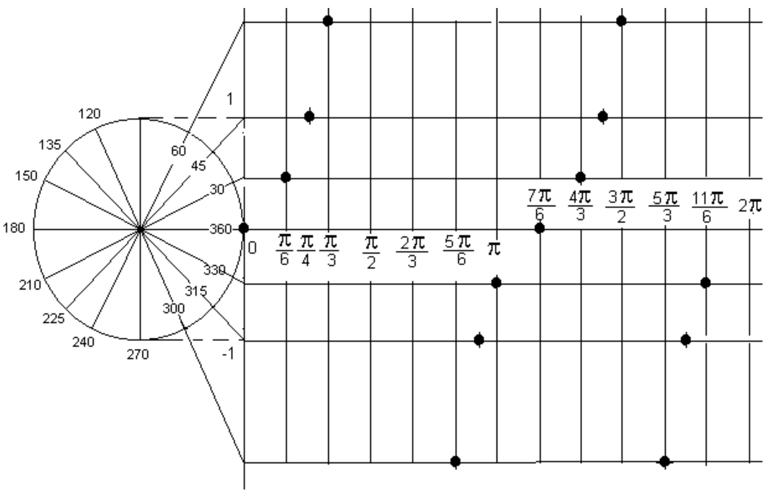
A partir de les dades anteriors, podem el·laborar les gràfiques de les funcions sinus, cosinus i tangent:



FUNCIÓ SINUS



FUNCIÓ COSINUS



FUNCIÓ TANGENT

Fórmules trigonomètriques

SUMA DE DOS ANGLES

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - tan\,\alpha \cdot \tan\beta}$$

L'ANGLE DOBLE

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

DIFERÈNCIA DE DOS ANGLES

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + tan\,\alpha \cdot \tan\beta}$$

L'ANGLE MEITAT

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

SUMES I DIFERÈNCIES DE SINUS I DE COSINUS

Expresió de les sumes o diferències en forma de producte

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cdot \cos\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}$$

Equacions trigonomètriques

Per a resoldre equacions trigonomètriques, cal tenir en compte les fórmules i relacions trigonomètriques a l'hora de substituïr incògnites. No s'han de simplificar mai els resultats, ja que es perden solucions