NOMBRES COMPLEXOS

- Els nombres complexos són les expressions *a+bi* on *a* i *b* són nombres reals.
- La unitat imaginària (*i*) = $\sqrt{-1}$
- L'expressió *a+bi* es denomina **forma binòmica** d'un nombre complex perquè te dos components: *a*→ Component Real *b*→ Component imaginari
- Dos nombres complexos són iguals quan tenen el mateix component real i el mateix component imaginari → (*4+5i = 4+5i ≠4-5i*)
- El conjunt de tots els nombres complexos es designa per $\mathbb{C}$ → $\mathbb{C} = \{a + bi \ / \ a, b \ \in \ \mathbb{R}\}$
- Els nombres Reals són Complexos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, perquè *a+0i = a*
- Els nombres imaginaris són els nombres complexos on *b≠0* .
- Nombres imaginaris purs → $a = 0 \rightarrow 0 + bi = bi$
- $(a + bi)$ i $(-a - bi)$ → ***oposats***
- $(a + bi)$ i $(a - bi)$ → ***conjugats***
- si $i = \sqrt{-1}$, llavors:

  $\boldsymbol{i^2} = \sqrt{-1}^2 = \mathbf{-1}$

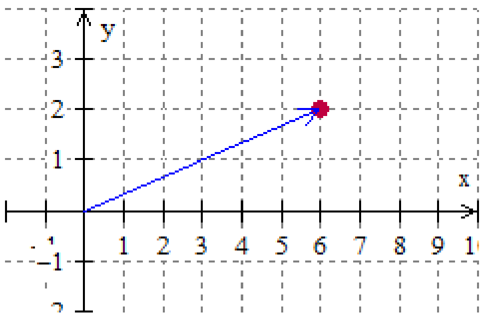
  $\boldsymbol{i^3} = i^2 \cdot i = -1\sqrt{-1} = \boldsymbol{-i}$

  $\boldsymbol{i^4} = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = \mathbf{1}$

REPRESENTACIÓ GRÀFICA

Els nombres complexos es representen en uns eixos cartesians. Eix **X** és **l'EIX REAL** i eix **Y** és **l'EIX IMAGINARI.** Per representar-lo dibuixem un vector des de l'origen (0,0) fins al punt (*a,b*)

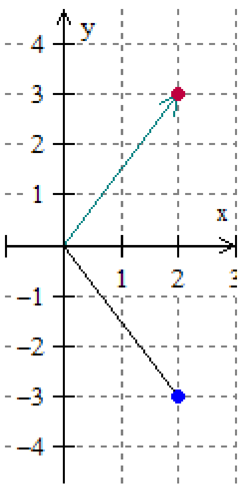
Exemple: 6 + 2i



Qualsevol equació de segon grau amb coeficients reals que no tinga solució real té dues solucions imaginàries que són nombres complexos conjugats.

Exemple:

$x = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9}i = 2 \pm 3i \rightarrow 2 + 3i\,, 2 - 3i$



OPERACIONS AMB NOMBRES COMPLEXOS

Suma: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

Resta: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

Multiplicació: $(a+bi)\cdot(c+di)= \ ac+adi+bci+bdi^2=ac+(ad+bc)i-bd$

El producte d'un nombre complex pel seu conjugat sempre és un nombre real: $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

Divisió: Multiplicar pel conjugat del denominador. No es pot dividir per 0

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

NOMBRES COMPLEXOS EN FORMA POLAR

Un nombre complex escrit de maner binòmica (*a + bi)* es pot representar de manera polar, amb un mòdul i un argument.

Mòdul i argument d'un nombre complex:

- El **mòdul** d'un nombre complex z és la longitud del vector que el representa. Es designa per |z|
- L' **argument** d'un nombre complex diferent de zero és l'angle que forma el vector amb l'eix real. Es designa per $\arg(z)$
- Llavors si $|z| = r$ i $\arg(z) = \alpha$, el nombre complex es pot designar $z = r_\alpha$

Pas de forma binòmica a forma polar

Podem representar un nombre complex $z = a + bi$ en la seua forma polar, seguint aquests passos:

- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- $\alpha=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

Pas de la forma polar a la forma binòmica

Coneixent un nombre complex $z=r_\alpha$ en forma polar, les relacions següents permeten passra-lo a forma binòmica:

$$a = \ r\cos\alpha \qquad b=r\sin\alpha$$

Segons aquestes igualtats, el nombre complex pot posar-se així (forma trigonomètrica):

$$z = r\cos\alpha+(\ r\sin\alpha)i=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

SUCCESSIONS

Una **successió** és un conjunt de nombres donats ordenadament de manera que es puguen enumerar: primer, segon tercer...

Els elements de la successió s'anomenen **termes** i se solen designar mitjançant una lletra amb els subíndex corresponents als llocs que ocupen en la successió: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

El **terme general** d'una successió és el terme que representa qualsevol terme de la successió. Així, per exemple, podem representar la famosa successió de Fibonacci amb el terme general:

Successió: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

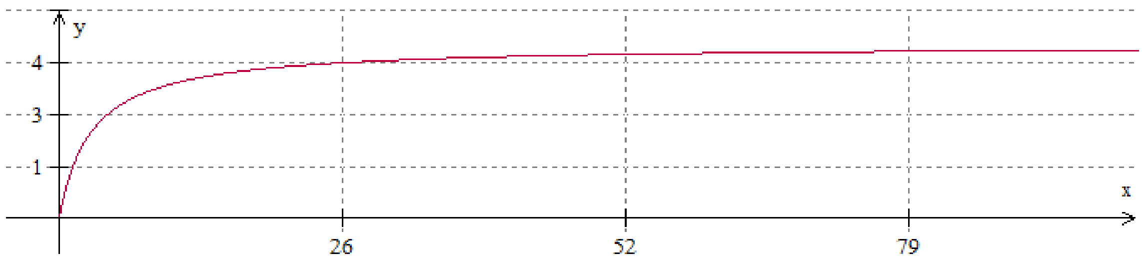
Terme general: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ si $n \geq 2$

Els **límits d'una successió** són aquells nombres als quals tendeix una successió, és a dir, que cada vegada s'hi apropa més.

Exemple:

$$a_n = \frac{5n}{n+3} \quad \rightarrow \quad \lim a_n = 5$$

n	a_n
0	0
10	3,84
100	4,85
1000	4,985
10000	4,9985



Progressions aritmètiques

Successions en les quals es passa de cada terme al següent sumant un mateix nombre (positiu o negatiu) el qual denominem **diferència**, d, de la progressió.

Terme general de les progressions aritmètiques:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Suma dels n termes d'una progressió aritmètica:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Progressions geomètriques

Successions en les quals es passa de cada terme al següent multiplicant per un nombre fix, r, la **raó.**

Terme general de les progressions aritmètiques:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Suma dels n termes d'una progressió geomètrica:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}, \qquad \text{ja que} \qquad a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Suma de tot els termes d'una progressió geomètrica amb raó: $0 < r < 1$:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

ÀLGEBRA

Polinomis: operacions

SUMA I RESTA: Sumar/restar els termes que tenen la incògnita elevada al mateix exponent:

Exemple: $(5x^3 + 4x^2 - 5) + (3x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x) = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 5$

MULTIPLICACIÓ: Multiplicar tots els termes entre ells:

Exemple: $(x^2 + 2x) \cdot (x^3 + x^2) = x^5 + x^4 + 2x^4 + 2x^3 = x^5 + 3x^4 + 2x^3$

DIVISIÓ DE POLINOMIS : Si el divisor és del tipus $x \pm a$ podem dividir mitjançant Ruffini

Exemples:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 + 2x + 1 & x^2 + 5x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^3 - 5x^2 + 2x & x - 6 \\ \cline{1-1}
-6x^2 + 4x + 1 & \\
+6x^2 + 30x - 12 & \\ \cline{1-1}
34x - 11 &
\end{array}$$

Exemples:

$$\begin{array}{r|l}
3x^2 \qquad - 4 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-3x^3 - 3x \; - 4 & 3x - 3\ (Q) \\ \cline{1-1}
-3x - 4 & \\
3x \; + 3 & \\ \cline{1-1}
-1\ (R) &
\end{array}$$

RUFFINI

	3	0	-4
-1		-3	3
	3	-3	-1

$3x - 3 = Q \qquad -1 = R$

FACTORITZACIÓ DE POLINOMIS

- Treure la x factor comú, sempre que siga possible
- Descomposar mitjançant Ruffini

Exemple:

$x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2 = x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40)$

Ruffini(divisors del terme independent) $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40$

	1	0	-15	-42	-40
-2		-2	4	22	40
	1	-2	-11	-20	**0**
5		5	15	20	
	1	3	4	**0**	

DESCOMPOSICIÓ:

$x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40) =$
$x^2(x+2)(x-5)(x^2+3x+4)$

SUMA I RESTA DE FRACCIONS ALGEBRAIQUES — CONVERSIÓ A COMÚ DENOMINADOR

Les **fraccions algebraiques** són el quocient de dos polinomis, $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Reducció a denominador comú: descomposar factorialment cada polinomi del denominador i extreure'n el mínim comú múltiple (tots els factors comuns i no comuns al major exponent)

Exemple:

$$\frac{1}{x} \text{ i } \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x(x-2)} \text{ i } \frac{x(x+1)}{x(x-2)}$$

Suma i resta: per a sumar i restar, primer fem la conversió a comú denominador i després sumem els numeradors

Exemple:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x(x+1)} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x+7)}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} - \frac{x(2x-1)}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+7x+x+7+x-2-2x^2+x}{x^2+x} = \frac{-x^2+10x+5}{x^2+x}$$

Multiplicació i divisió: per a multiplicar, multipliquem els numeradors i els denominadors. Per a dividir, multipliquem el numerador de la primera pel denominador de la segona, i el denominador de la primera pel numerador de la segona

Exemples:

$$\boldsymbol{Multiplicaci}\acute{o} \rightarrow \frac{3x+1}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{x(3x+1)}{x^2-1^2}=\frac{3x^2+x}{x^2-1}$$

$$\boldsymbol{Divisi}\acute{o} \rightarrow \frac{(2x)}{x+1}:\frac{x-1}{x^2}=\frac{x^2(2x)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x^3}{x^2-1}$$

EQUACIONS

Equacions de segon grau:

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Equacions biquadrades:

$$ax^4+bx^2+c=0 \xrightarrow{subst} [x^2=y] \rightarrow ay^2+by+c=0 \rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

Equacions amb radicals:

- Aïllar l'arrel quadrada en una part de la igualtat
- Elevar ambdues parts al quadrat
- Comprovar les solucions, ja que no totes poden ser correctes

Exemple:

$$\sqrt{2x-3}+1=x \rightarrow \sqrt{2x-3}=x-1 \rightarrow \sqrt{2x-3}^2=(x-1)^2 \rightarrow 2x+3=x^2-2x-1$$
$$\rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow \boldsymbol{x=2} \quad Comprovaci\acute{o}: \sqrt{1}+1=2 \quad OK$$

Equacions amb la x al denominador

Convertir tota la equació a una de semblant amb el mínim comú múltiple

Equacions exponencials

- **Bases iguals**

$$3^x-9=0 \rightarrow 3^x=9 \rightarrow 3^x=3^2 \rightarrow x=2$$

- **Bases diferents**

$$3^{1-x^2}=2 \rightarrow \log 3^{1-x^2}=\log 2 \rightarrow (1-x^2)\log 3=\log 2 \rightarrow x^2=1-\frac{\log 2}{\log 3}$$

$$x=\sqrt{1-\frac{\log 2}{\log 3}}$$

- **Altres tipus**

$$2^x + 2^{x+1} = 12 \quad \rightarrow \quad 2^x + 2^x \cdot 2 - 12 = 0 \xrightarrow{subst} 2^x = y \quad \rightarrow \quad y + 2y - 12 = 0$$
$$\rightarrow \quad y = \frac{12}{3} = 4 \quad \rightarrow \quad 2^x = 4 \quad \rightarrow \quad 2^x = 2^2 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Equacions logarítmiques: Son aquelles en les què la incògnita es troba en una expressió afectada per un logaritme.

Per a resoldre-les, cal tenir en compte les propietats dels logaritmes

$\log_a P = x \rightarrow a^x = P$

$\log_a a^n = n$

$\ln e^n = n$

$\log_a 1 = 0 \; ; \; \ln 1 = 0$

$\log_a a = 1 \rightarrow a^1 = a$

$\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$

$\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$

$\log_a P^n = n \cdot \log_a P$

$\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{1}{n} \log_a P = \frac{\log_a P}{n}$

$\log_a P = \frac{\log P}{\log a}$

INEQUACIONS amb una incògnita

Resolem com una equació normal, però en cas que la x estiga multiplicada per un coeficient negatiu, al passar a l'altra banda de la inequació dividint, canviem el signe de la inequació.

Exemple:

$$-2x + 1 < 7 \quad \rightarrow -2x < 6 \quad \rightarrow \quad x > \frac{6}{-2} \quad \rightarrow \quad x > -3 \quad \rightarrow solucions = (+3, +\infty)$$