LÍMITS I DERIVADES

Límits d'una funció quan $x \to \infty$

Si considerem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b$ podem determinar algunes propietats:

Sumes i restes

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x) = a \pm b$$

Multiplicacions

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x) = a \cdot b$$

Quocients

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Grau $f(x) >$ grau $g(x)$ $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$
- Grau $f(x) <$ grau $g(x)$ $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- Grau $f(x) =$ grau $g(x)$ $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\text{coeficient del terme de major grau de } f(x)}{\text{coeficient del terme de major grau de } g(x)}$

Potències

Si $f(x) > 0$ llavors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = a^b$

$\lim\limits_{x\to\infty} n^{f(x)}$ tenim diferents opcions

- $n > 1$
  - $n^{\infty} = \infty$
  - $n^{-\infty} = 0$

- $0 < n < 1$
  - $n^{\infty} = 0$
  - $n^{-\infty} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} -n^{f(x)}$

- $-n^{\infty}$ *o bé* $(-n)^{-\infty} \rightarrow$
  No hi ha límit perquè el valor pot variar segons si l'exponentés + o −
  No obstant això s'hade comprovar l'exponent perquè es pot donar el cas que sempre sigui parell

Arrels

Si n és imparell o n és parell i $f(x) \geq 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to\infty} -f(x)} = \sqrt[n]{a}$

Logaritmes

$Si\ \alpha > 0\ i\ f(x) > 0 \ \ \rightarrow \ \ \lim\limits_{x\to\infty} \log_\alpha f(x) = \log_\alpha \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \log_\alpha a$

Límits d'una funció quan $x \to \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$

Límits infinits

- Potències si $k > 0$ → $\lim_{x\to\infty} x^k = \pm\infty$
- Exponencials si $a > 1$ → $\lim_{x\to\infty} a^x = \pm\infty$
- Logarítmiques si $a > 1$ → $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \pm\infty$

Comparació d'infinits *(ordre d'infinits)*

- Donades dues potències de x la de major exponent és un infinit d'ordre superior
- Donades dues funcions exponencials de bases majors que 1, la de major base és un infinit d'ordre superior
- Les funcions exponencials de base major que 1 són un infinit d'ordre superior a qualsevol potència
- Les funcions exponencials de base major que 1 i les potències de x són d'ordre superior a les funcions logarítmiques
- Dos polinomis del mateix grau o dues potències de la mateixa base són infinits del mateix ordre
- Si en una suma hi ha diversos sumands infinits, l'ordre de la suma és el del sumand de major ordre

$$exponencials > potències > polinomis > logaritmes$$

Operacions amb expressions infinites

<table>
<tr><th>Sumes</th><th colspan="2">Productes</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$(+\infty) \pm (l) = (+\infty)$</td><td colspan="2">$(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$</td><td rowspan="2">$l > 0$</td><td>$(+\infty) \cdot (l) = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(-\infty) \pm (l) = (-\infty)$</td><td>$(-\infty) \cdot (l) = (-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$</td><td rowspan="2">$l < 0$</td><td>$(+\infty) \cdot (l) = (-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$-(-\infty) = (+\infty)$</td><td>$(-\infty) \cdot (l) = (+\infty)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Quocients</th><th>Potències</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{l}{\pm\infty} = 0$</td><td>$(+\infty)^{+\infty} = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{\infty^\infty} = 0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">$\frac{l}{0} = \pm\infty$ si $l \neq 0$</td><td colspan="2">$Si\, l > 0 \;\rightarrow\; (+\infty)^l = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Si\, l < 0 \;\rightarrow\; (+\infty)^l = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\pm\frac{\infty}{0} = \pm\infty$</td><td colspan="2">$Si\, l \neq 0 \;\rightarrow\; l^0 = 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l > 1$</td><td>$(l)^{+\infty} = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{0}{\pm\infty} = 0$</td><td>$(l)^{-\infty} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$0 < l < 1$</td><td>$(l)^{+\infty} = 0$</td></tr>
<tr><td>$(l)^{-\infty} = (+\infty)$</td></tr>
</table>

Límits amb el número e

$\text{lím}_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{lím}_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$

I a partir d'aquests n'obtenim d'altres:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a = e^a$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{-a}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax+b} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^b = e^a\cdot 1 = e^a$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{k}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{x}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = e^k$$

INDETERMINACIONS

$\boxed{\mathbf{1}^\infty}$

$Quan\ tenim\ una\ expressió\ del\ tipus\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ i\ x\to\infty\ \cong\ 1^\infty$

Podem fer servir una regla general amb el número e:

$$Si\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 1\ i\ \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty\ llavors\ \lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} f(x)-1\cdot g(x)}$$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

S'ha de tenir en compte l'ordre de cada infinit.

Si tenen el mateix ordre, el límit és el quocient dels coeficients del terme de major grau

Si el numerador és d'ordre superior al denominador llavors el límit pot ser $\pm\infty$

Si el denominador té un ordre superior al numerador, llavor els límit és zero

$\boxed{\infty - \infty}$

- Arrels: multiplicar pel conjugat i calcular el límit després d'operar
- Fraccions: operar els polinomis i calcular el límit del polinomi resultant

$\boxed{\frac{0}{0}}$

Descomposició mitjançant Ruffini del numerador i denominador. Suprimir els termes comuns i tornar a calcular el límit.

Límits laterals

En cas de tenir un límit $\boxed{\text{lím}_{x\to n} f(x) = \frac{a}{0} = \pm\infty}$ hem de calcular els límits laterals quan x tendeix a n per la dreta i per l'esquerra. *A tenir en compte que els números negatius van al revés.*

CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

$f(x)$ *és contínua en* $x = a \quad \to \quad \lim_{x\to a^+} f(a) = \lim_{x\to a^-} f(a) = f(a)$

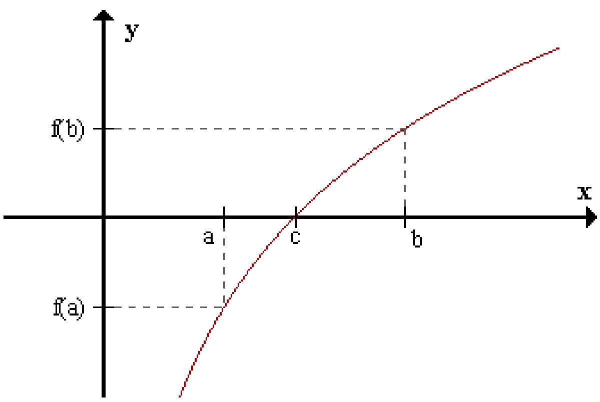
$f(x)$ *és de salt finit en* $x = a \to \quad \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$

$f(x)$ *és de salt infinit en* $x = a \to \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

$f(x)$ *no existeix en* $x = a \to \quad \lim_{x\to a} f(x) = \textbf{\textit{no eixsteix}}$

Teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano diu que si *f(x)* és contínua en un interval tancat i en els seus extrems pren valors de signe distint, llavors, amb seguretat, talla l'eix X en aquest interval.



És a dir:

$\boxed{f(x) \textit{ contínua a } [a,b] \textit{ i signe } f(a) \neq \textit{signe } f(b), \textit{llavors existeix } c \in (a,b) \textit{ tal que } f(c) = 0}$