INTERACCIÓ GRAVITATÒRIA

REPÀS FÓRMULES DE MOVIMENT

MRU

$\boxed{x = x_0 + v \cdot t}$ $[m]$

$\boxed{v = \dfrac{\Delta x}{t}}$ $[m/s]$

MRUA

$\boxed{x = x_0 + v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2}at^2}$ $[m]$

$\boxed{a = \dfrac{\Delta v}{t}}$ $[m/s^2]$

$\boxed{v = v_0 + a \cdot t}$ $[m/s]$

$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2as}$ $[m/s]$

CAIGUDA LLIURE

MRUA on $a = -g$

MCU

$\boxed{s = \varphi \cdot R}$ $[m]$

$\boxed{\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{t}}$ $[rad/s]$

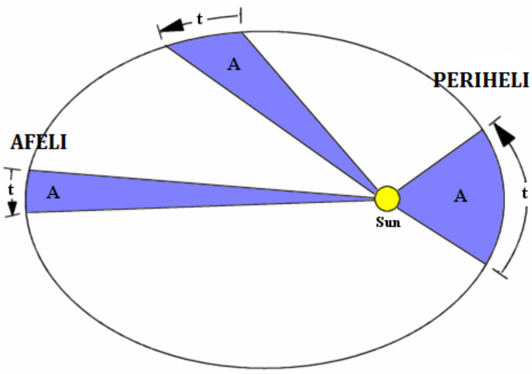
$\boxed{v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{\varphi \cdot R}{t} = \omega \cdot R}$ $[m/s]$

$\boxed{a_c = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\omega^2 \cdot \mathrm{R}^2}{\mathrm{R}} = \omega^2 \cdot \mathrm{R}}$ $[\mathrm{m/s^2}]$

$\boxed{T = \dfrac{2\,\pi}{\omega}}$ $[s]$

LLEIS DE KEPLER

- 1ª. Tots els planetes es mouen al voltant del sol seguint òrbites el·líptiques. El Sol està a un dels focus de l'el·lipse.
- 2ª Els planetes es mouen amb velocitat areolar constant. El vector posició de cada planeta respecte del Sol ($\vec{r}$) escombra àrees iguals en temps iguals. $\frac{dA}{dt} = k$
  Observem que:
  L'àrea [A] escombrada al periheli és igual a l'àrea escombrada a l'afeli durant el mateix període de temps [t].
  La distància recorreguda al periheli és major que a l'afeli per tant:
  $v = s/t \rightarrow \boxed{v_{per} > v_{afe}}$



- 3ª Per a tots els planetes es compleix la següent equació on, a és el semieix major de l'el·lipse (a la pràctica, la distància mitjana al Sol) i T el període de translació del planeta:

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = k} \; [s^2/m^3]$$

MOMENT ANGULAR

Sabent que la quantitat de moviment d'un cos ve determinada per l'expressió $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ podem determinar el moment angular com el producte de la quantitat de moviment pel vector posició (Distància entre els planetes). Així $\boxed{\vec{\mathrm{L}} = (m \cdot \vec{v}) \times \vec{r}}$. El moment angular es conserva en tots els punts: $\mathrm{L_n} = m \cdot v_n \cdot r_n \quad \rightarrow \quad L_1 = L_2 = L_n$

FORCES ENTRE PLANETES

A partir de l'expressió $F = m \cdot a$ determinem que $\boxed{F_c = m \cdot a_c}$ i a partir de les fórmules del moviment circular uniforme (MCU) i la tercera llei de Kepler obtenim:

$$F_c = m \cdot [a_c] = m \cdot \left[\frac{v^2}{r}\right] = m \cdot \left[\frac{\omega^2 \cdot r^2}{r}\right] = m \cdot [\omega^2] \cdot r = \frac{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}{[T^2]} = \frac{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}{r^3 \cdot k} = \boldsymbol{m} \cdot \frac{\boldsymbol{4\pi^2}}{\boldsymbol{r^2 \cdot k}}\ [\mathbf{N}]$$

En conclusió, la força centrípeta varia inversament amb el quadrat de la distància)i és proporcional a la massa del planeta): $F_C = f \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right)$

El Sol havia de ser el causant del moviment dels planetes. Newton va determinar que $\frac{4\pi^2}{k}$ havia de ser proporcional a la massa del sol M → $\boxed{\frac{4\pi^2}{k} = G \cdot M}$

De manera que $F_C = F_G$

On M és la massa del Sol, m la massa del planeta, r la distància del Sol al planeta i G la constant de gravitació universal ($6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot Kg^{-2}}]$)

$$\boxed{\boldsymbol{F_G} = \frac{m4\pi^2}{r^2k} = \boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{M \cdot m}}{\boldsymbol{r^2}}\ [\mathrm{N}]}\ (o\ vectorialment)\ \boxed{\vec{F}_G = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r\ [\mathrm{N}]}$$

LA GRAVETAT

Donat que $\vec{F_c} = m \cdot \vec{a}_c$ on $\vec{a}_c$ és l'acceleració (atracció gravitatòria) podem determinar a partir de l'expressió de la força que:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \text{i que} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{g} \quad \text{obtenim} \quad -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \vec{g} \rightarrow \boxed{\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2}\vec{u}_r}\ [m/s^2]$$

Si tenim un conjunt de masses puntuals, llavors la interacció gravitatòria del conjunt ve determinada per:

$$\boxed{\vec{g}_t = \sum_i \vec{g}_i = \sum \left(-G \cdot \frac{M_i}{r_i^2}\right)\vec{u}_r}\ [\mathrm{m/s^2}]$$

ENERGIA POTENCIAL GRAVITATÒRIA

És l'energia que té una massa pel fet d'estar sota la influència d'una altra.

Sabent què $E_p = m \cdot g \cdot h$ i què $g = -G \cdot \frac{M}{r^2}$ observem què:

$$E_p = m \cdot -\left(\frac{GM}{r^2}\right) \cdot h \rightarrow \boxed{E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}} \text{ [J]}$$

Així mateix, l'energia potencial d'un sistema de partícules seria la suma de les diferents energies potencials de cada parell de masses.

Per exemple, en un sistema de quatre masses M_1 M_2 M_3 M_4

$\boldsymbol{E_{pt}} = E_{p_{14}} + E_{p_{13}} + E_{p_{12}} + E_{p_{43}} + E_{p_{42}} + E_{p_{32}}$ [J] *Així* $\boxed{E_{pt} = \sum E_p}$ [J]

Cal enunciar també **el principi de conservació de l'energia mecànica**, atès que aquesta es conserva. Així $\boxed{E_{p_A} + E_{c_A} = E_{p_B} + E_{c_B} = E_M}$

POTENCIAL GRAVITATORI EN UN PUNT

El potencial gravitatori en un punt (V) és l'energia potencial per unitat de massa en aquest punt.

Per tant:

$$V = \frac{E_p}{m} \rightarrow \boxed{V = -G \cdot \frac{M}{r}} \text{ [J/kg]}$$

Si tenim una distribució de masses puntuals llavors, el potencial en un punt del sistema ve determinat per:

$$\boxed{V_T = \sum_i V_i = \sum -G \cdot \frac{M}{r_i}} \text{ [J/Kg]}$$

Anomenem **diferència de potencial** l'increment del potencial entre dos punts [i] i [f]

$$\Delta V = V_f - V_i \rightarrow \boxed{\Delta V = \left(-G \cdot \frac{M}{r_f}\right) - \left(-G \cdot \frac{M}{R_i}\right)} \text{ [J/Kg]}$$

TREBALL CAUSAT PER LES FORCES GRAVITATÒRIES

El treball necessari per a moure una massa des d'un punt inicial [i] fins a un punt final [f] ve determinat per la integral següent.

$$W_{i \to f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Arribant, després de resoldre-la a la següent conclusió:

$$\boxed{W_{(i\to f)} = \frac{G\cdot M\cdot m}{r_f} - \frac{G\cdot M\cdot m}{r_i} = -\Delta E_p}\ [\mathrm{J}] \quad \text{També podem aplicar} \quad \boxed{W_{i\to f} = -m\cdot\Delta V}\ [\mathrm{J}]$$

DEMOSTRACIONS

$$\boldsymbol{W_{i\to f}} = -\Delta \boldsymbol{E_p} = -\left(-\frac{G\cdot M\cdot m}{r_f} + \frac{G\cdot M\cdot m}{r_i}\right) = -m\left(-\frac{G\cdot M}{r_f} + \frac{G\cdot M}{r_i}\right) = -m\left(V_f - V_i\right) = -\boldsymbol{m}\cdot\Delta\boldsymbol{V}$$

O bé $\boldsymbol{W_{i\to f}} = -\Delta E_p = -(m\cdot V_f - m\cdot V_0) = -m\left(V_f - V_0\right) = -\boldsymbol{m}\cdot\Delta\boldsymbol{V}$

SATÈL·LITS QUE ORBITEN LA TERRA

Velocitat orbital

Per als satèl·lits que giren a una altura h per sobre de la superfície de la Terra es compleix que

$$F_G = F_C \to \frac{G(M_T\cdot m_s)}{r^2} = \frac{m_s\cdot v^2}{r} \quad \text{tenint en compte que r} = R_t + h$$

Si simplifiquem l'equació anterior i reordenem els termes, obtenim la fórmula de la v. orbital.

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T + h}}\ [m/s]}$$

Període de revolució

És el temps que tarda el satèl·lit a completar la seva òrbita. Obtenim la fórmula a partir de la relació entre la velocitat orbital i la velocitat angular.

$$F_C = F_G \to G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{r^2} = \frac{m_s\cdot v^2}{r} \to v^2 = G\cdot\frac{M_T}{r} \qquad si\ v = \omega\cdot r\ i\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v^2 = \omega^2\cdot r^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot r^2 = G\cdot\frac{M_T}{r}$$

Simplifiquem i aïllem el període

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot r^3}{G\cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(R_T + h)^3}{G\cdot M_T}}\ [s]}$$

Els **satèl·lits geostacionaris** o geosíncrons són aquells que orbiten al voltant de la Terra mantenint-se sobre un mateix punt (tenen el mateix període que la Terra)

La pregunta d'aquests tipus de satèl·lits acostuma a ser quina és l'altura a la qual orbita. A tenir en compte que el valor r és $R_T + h$

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{T^2\cdot G\cdot M_T}{4\pi^2}}\ [m]}$$

L'energia dels satèl·lits

Els satèl·lits estan sotmesos únicament a l'acció del camp gravitatori de manera que podem determinar l'energia mecànica de la següent manera

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Sabent que $F_G = F_C$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = m \cdot v^2$$

Simplificant les expressions anteriors

$$E_M = \frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \rightarrow \boxed{E_M = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \ [J]}$$

Podem establir a partir de l'equació anterior les **relacions entre E_M, E_C i E_p**

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} E_p \quad ; \quad E_C = -\frac{1}{2} E_p}$$

La velocitat de llançament és la velocitat necessària amb què s'ha de llançar un satèl·lit per poder posar-lo en òrbita. Suposem que l'hem de llançar des de la superfície de la Terra i ficar-lo a una òrbita determinada.

$$E_{MT} = E_{MO} \rightarrow E_{C1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v_{lla}^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R_T} = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot v_{lla}^2 - \frac{G \cdot M}{R_T} = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M}{r}$$

$$\text{En òrbita } F_G = F_C \rightarrow \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} \quad \rightarrow \quad \frac{G \cdot M}{r} = v_2^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_{lla}^2 - \frac{G \cdot M}{R_T} = \frac{1}{2} \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M}{r} \rightarrow v_{lla}^2 = 2 \cdot \left(\frac{G \cdot M}{R_T} - \frac{1}{2} \frac{G \cdot M}{r} \right)$$

Si simplifiquem l'equació anterior, obtenim la següent:

$$\boxed{v_{lla} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right)} \ [m/s]}$$

L'energia necessària per al canvi d'òrbita és l'energia que necessitem perquè un satèl·lit passi d'una òrbita (1) a una altra (2). Si l'òrbita a la qual passa el satèl·lit és superior li hem de comunicar energia al satèl·lit. A partir de l'equació de l'energia mecànica obtenim ΔE

$$E_M = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \qquad \Delta E = E_2 - E_1$$

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r_2} - \left(-\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r_1} \right) \rightarrow \boxed{\Delta E = \frac{1}{2} G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \ [J]}$$

La **velocitat d'escapament** és la velocitat necessària que se li ha de comunicar a un satèl·lit perquè escapi del camp gravitatori terrestre.

El satèl·lit sortirà del camp gravitatori quan $r \to \infty$ de manera que $E_M = 0$

A partir de l'expressió de la velocitat de llançament, deduïm la d'escapament.

$$v_{lla} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)} \quad si \ \lim_{r \to \infty} \frac{1}{2r} = 0 \ llavors \qquad \boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R_T}} \ \ [m/s]}$$

Cal tenir en compte que la massa del satèl·lit no influeix en res sinó que depèn del radi del planeta i de la seua massa. Si aquest satèl·lit es trobés orbitant a una certa altura i haguéssim de propulsar-lo fora de l'acció del camp gravitatori, el denominador de la fórmula seria $R_T + h$

ENERGIA DELS SATÈL·LITS I TIPUS D'ÒRBITA

L'energia d'un satèl·lit determina el tipus de moviment i la forma de l'òrbita descrita. Això passa també per a qualsevol cos celeste que giri al voltant d'un astre que crea un camp gravitatori.

A partir de l'energia mecànica podem tenir els casos següents

<table>
<tr><td>$E_M < 0$</td><td colspan="2">Òrbita tancada. El satèl·lit no pot escapar de l'òrbita</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$E_M \geq 0$</td><td>$E_M = 0$</td><td>Òrbita oberta (parabòlica). El satèl·lit pot escapar de l'atracció gravitatòria arribant a l'infinit amb quasi gens velocitat</td></tr>
<tr><td>$E_M > 0$</td><td>Òrbita oberta (hiperbòlica). El satèl·lit pot escapar de l'atracció gravitatòria allunyant-se indefinidament i amb velocitat (E_C)</td></tr>
</table>