GEOMETRIA EN L'ESPAI

VECTORS EN L'ESPAI

OPERACIONS AMB VECTORS

Un **vector** és un segment orientat en l'espai que té un mòdul, una direcció i un sentit coneguts: té un extrem i un origen (*Exemple: vector d'origen A i extrem B)*

$\overrightarrow{AB} = (x, y, z) \rightarrow Està\ format\ per\ tres\ components\ respecte\ un\ sistema\ de\ referència$

Podem obtenir un vector coneixent les coordenades de l'extrem (B) i l'origen (A) d'aquesta manera: $A(x_a, y_a, z_a)\ \ i\ B\ \ (x_b, y_b, z_b)$ → Resta de les coordenades de l'extrem menys les de l'origen

$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a\ \ ,\ \ y_b - y_a\ \ ,\ \ z_b - z_a) = (x, y, z)$

El **mòdul** d'un vector és la distància entre l'origen i l'extrem. Es designa $|\overrightarrow{AB}|$. Es determina mitjançant l'arrel quadrada de la suma de les components al quadrat.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = n$

La **direcció** del vector $\overrightarrow{AB}$ és la recta sobre la qual es troben els punts A i B i la de totes les rectes paral·leles a aquesta. En una mateixa direcció tenim dos **sentits** oposats: de A a B i de B a A.

Producte d'un vector per un nombre

Si multipliquem un vector $\vec{v}$ per un nombre k el resultat és un vector $\overrightarrow{v_2}$ amb la mateixa direcció, sentit igual (o oposat en el cas que k fóra negatiu) i mòdul igual al producte del mòdul de $\vec{v}$ per $|\ k\ |$

Vector unitari

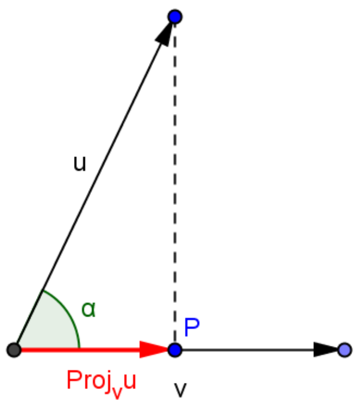
Els vectors unitaris tenen de mòdul la unitat. Calculem el vector unitari del vector $\vec{v}$ de la següent manera:

$$\overrightarrow{v_u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y,)z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

PRODUCTE ESCALAR DE VECTORS

El **producte escalar** dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és el següent

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}}$



Angle que formen dos vectors

Si aïllem l'expressió del producte escalar obtenim que

$$\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Projecció d'un vector sobre un altre

El segment projecció de $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ *sobre* $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ és el següent

$$\boldsymbol{proj}_{\vec{v}}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

El vector projecció s'obté multiplicant el segment projecció pel vector unitari del vector on es projecta

$$\overrightarrow{\boldsymbol{proj}_{\vec{v}}(\vec{\boldsymbol{u}})} = \frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}\cdot(x_2, y_2, z_2)$$

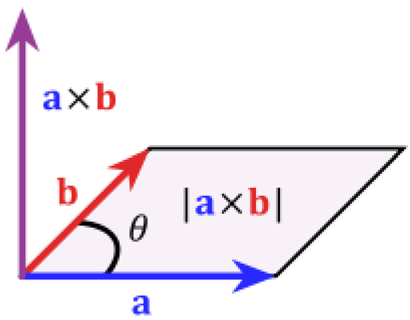
Operatòria amb el producte escalar.

Si les coordenades dels vectors estan expressades respecte a una base ortonormal, llavors podem calcular el producte escalar de la següent manera:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)\ i\ \vec{v}(x_2, y_2, z_2) \rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

PRODUCTE VECTORIAL

El **producte vectorial** de dos vectors $\vec{u}\times\vec{v}$ dóna lloc a un tercer vector, perpendicular als dos primers, de mòdul $|\vec{u}\times\vec{v}|$ i amb un sentit positiu si l'angle que formen els dos vectors és menor que 180º o negatiu si és major que 180º

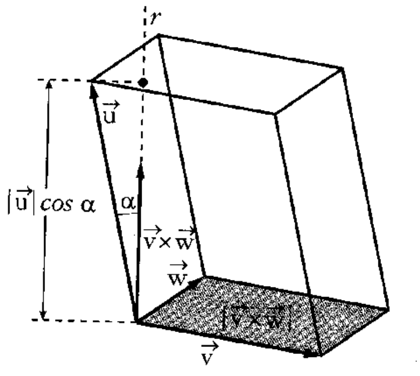


El **mòdul del producte vectorial** de dos vectors és igual a l'àrea del paral·lelogram que defineixen aquets

L'**expressió analítica** del producte vectorial de dos vectors es determina així

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{\imath},\quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath},\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \right)$$

PRODUCTE MIXT DE TRES VECTORS



S'anomena **producte mixt** dels vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ i es designa $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ el nombre que s'obté en operar-los de la manera següent: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

L'altura del paral·lelepípede és la projecció del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v} \times \vec{w}$ de manera que:

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos\alpha$

D'aquí deduïm que el valor del producte mixt de tres vectors és el volum del paral·lelepípede format per aquests.

Es pot **expressar el producte mixt** d'aquesta manera:

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{v}(x_2, y_2, z_2) \quad \vec{w}(x_3, y_3, z_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (x_1,\ y_1,\ z_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

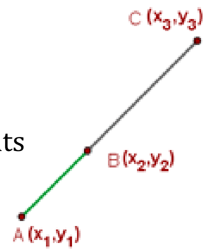
PUNTS, RECTES I PLANS EN L'ESPAI

VECTORS I PROBLEMES GEOMÈTRICS

Coordenades del **vector que uneix dos punts**

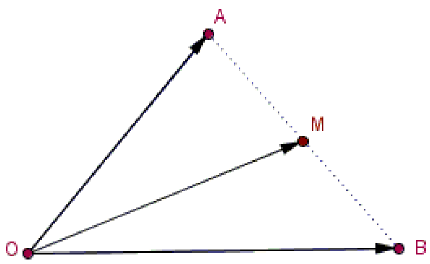
$P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$ $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1 \quad , \quad y_2 - y_1 \quad , \quad z_2 - z_1)$

Comprovació que tres punts estan alineats



$A(x_1, y_1, z_1);\ \ B(x_2, y_2, z_2);\ \ C(x_3, y_3, z_3)$
Si els vectors $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{BC}$ tenen coordenades proporcionals, els vectors estan alineats

Punt mitjà d'un segment

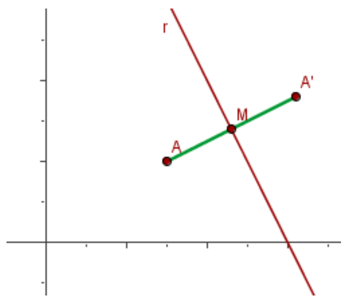


$A(x_1, y_1, z_1);\quad B(x_2, y_2, z_2)$

per a trobar el punt M (punt mitjà) operem:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Simètric d'un punt respecte d'un altre



Per obtenir el punt P', simètric del punt P respecte de M seguim el següent procediment:

$P(x_1, y_1 z_1);\ \ M(x_2, y_2, z_2);\ \ P'(a, b, c)$

$$\frac{x_1 + a}{2} = x_2 \qquad \frac{y_1 + b}{2} = y_2 \qquad \frac{z_1 + c}{2} = z_2$$

$$2x_2 - x_1 = a \qquad 2y_2 - y_1 = b \qquad 2z_2 - z_1 = c$$

EQUACIONS DE LA RECTA

Donats un punt i un vector director, podem obtenir l'equació de la recta que passo pel punt i que tingui la direcció del vector director

$P(p_1, p_2, p_3)$; $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$

Equació vectorial → $\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{d}}$ → $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3,) + \lambda(d_1, d_2, d_3)$

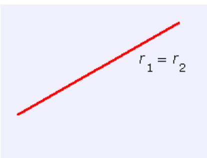
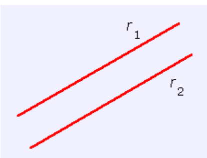
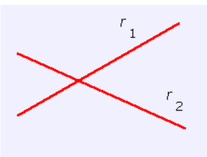
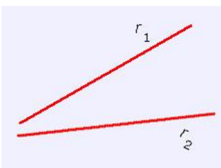
De l'equació vectorial aïllem cada component del vector $\overrightarrow{OX}$ i obtenim les **equacions paramètriques** i si aïllem el paràmetre lambda de cada equació, obtenim l'equació de la **recta en forma contínua**

$$\boxed{r: \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases}} \quad \lambda = \frac{x - p_1}{d_1}; \quad \lambda = \frac{y - p_2}{d_2}; \quad \lambda = \frac{z - p_3}{d_3} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3}}$$

També es pot expressar una recta com la intersecció de dos plans, de manera que així obtenim **l'equació en forma implícita**.

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES

Coincideixen 	Si els vectors directors $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ són proporcionals $\boldsymbol{\vec{r_1} // \vec{r_2}}$ llavors hem de comprovar si un punt d'una recta també ho és de l'altra Si $\boldsymbol{P_{r_1} \in r_2}$ **o** $\boldsymbol{P_{r_2} \in r_1}$ En el cas que es donin aquests casos, les rectes coincideixen
Són paral·leles 	Si els vectors directors $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ són proporcionals $\boldsymbol{\vec{r_1} // \vec{r_2}}$ llavors hem de comprovar si un punt d'una recta també ho és de l'altra Si $\boldsymbol{P_{r_1} \notin r_2}$ **o** $\boldsymbol{P_{r_2} \notin r_1}$ Si els punts no pertanyen, les rectes són paral·leles
Es tallen  **Es creuen a l'espai** 	Els vectors directors no són proporcionals. Llavors calculem el determinant format per $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ i $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ $\begin{vmatrix} \vec{r_1} \\ \vec{r_2} \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \end{vmatrix} = 0$ Si el determinant dóna zero, vol dir que els tres vectors són coplanaris i per tant, les rectes es tallen en un punt. Si pel contrari, el determinant és diferent de zero, llavors vol dir que els vectors formats NO SÓN coplanaris i que, per tant, <u>s'encreuen a l'espai però no es tallen.</u>

ESTUDI DE LES POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES MITJANÇANT RANGS

$$r_1: \begin{cases} \vec{d}(d_1, d_2, d_3) \\ P(p_1, p_2, p_3) \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} \overrightarrow{d'}(d'_1, d'_2, d'_3) \\ P'(p'_1, p'_2, p'_3) \end{cases} \rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} d_1 & d'_1 \\ d_2 & d'_2 \\ d_3 & d'_3 \end{pmatrix} \quad M' = \left(\begin{array}{cc|c} d_1 & d'_1 & p'_1 - p_1 \\ d_2 & d'_2 & p'_2 - p_2 \\ d_3 & d'_3 & p'_3 - p_3 \end{array}\right)$$

$* \ ran(M) = ran(M') = 1 \ \rightarrow les\ rectes\ coincideixen$

$* \ ran(M) = ran(M') = 2 \rightarrow les\ rectes\ es\ tallen$

$* \ ran(M) = 1 \ ; \ ran(M') = 2 \rightarrow les\ rectes\ són\ paral \cdot leles$

$* \ ran(M) = 2 \ ; \ ran(M') = 3 \rightarrow les\ rectes\ s'encreuen$

EQUACIONS DEL PLA

Per obtenir les equacions vectorials i paramètriques del pla, necessitem un punt del pla i dos vectors directors que defineixen la seua direcció.

$$P(p_1, p_2, p_3) \quad \overrightarrow{d_1}(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}) \quad \overrightarrow{d_2}(d_{2x}, d_{2y}, d_{2z})$$

Definim l'**equació vectorial de la següent manera:**

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{d_1} + \mu\overrightarrow{d_2}} \quad \rightarrow \quad (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(d_{1x}, d_{1y}, d_{1z}) + \mu(d_{2x}, d_{2y}, d_{2z})$$

Si aïllem cada component del vector $\overrightarrow{OX}$ obtenim les **equacions paramètriques**. I si eliminem els paràmetres λ i μ arribem a l'expressió en **forma implícita**

$$\boxed{\pi: \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_{1x} + \mu d_{2x} \\ y = p_2 + \lambda d_{1y} + \mu d_{2y} \\ z = p_3 + \lambda d_{1z} + \mu d_{2z} \end{cases}} \qquad \text{Implícita} \rightarrow \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

També podem obtenir l'equació implícita del pla a partir d'un punt $P(x_0, y_0, z_0)$ del pla i el vector normal $\vec{n}(a, b, c)$ a aquest (vector perpendicular al pla)

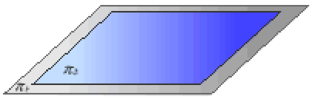
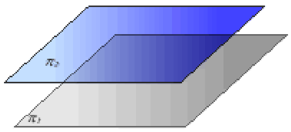
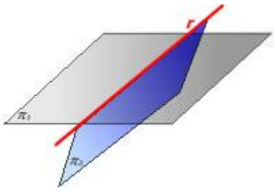
Si considerem X un punt de coordenades desconegudes i que pertany al pla, es compleix la condició que $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$

De manera que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \rightarrow \ (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

Arribant a la equació implícita $\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$ Podem deduir llavors que, quan ens donen un pla amb l'equació implícita, podem trobar quin és el vector normal a aquest, dada que ens permetrà resoldre més endavant diversos problemes.

POSICIONS RELATIVES DE DOS PLANS

Donats els plans $\begin{cases} \pi: ax+by+cz+d=0 \\ \pi': a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ amb els coeficients que multipliquen les coordenades i el coeficient del terme independent, podem determinar-ne la posició.

Coincidents 	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'} \to Mateix\ pla$
Paral·lels 	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'} \to Els\ plans\ són\ paral\cdot lels$
Es tallen 	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'} \to\ Els\ plans\ es\ tallen\ formant\ una\ recta$

DETERMINACIÓ MITJANÇANT RANGS

$M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad M'=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right)$

$*\ ran(M)=ran(M')=1 \to Els\ plans\ són\ coincidents\ (mateix\ pla)$

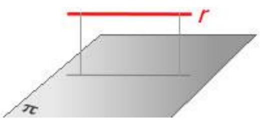
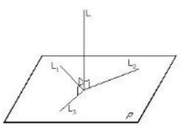
$*\ ran(M)=ran(M')=2 \to Els\ plans\ es\ tallen\ formant\ una\ recta$

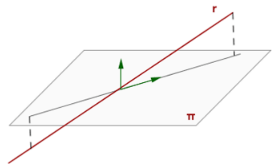
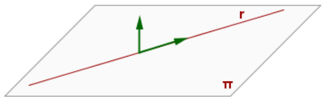
$*\ ran(M)=1;\ ran(M')=2 \to Els\ plans\ són\ paral\cdot lels$

POSICIONS RELATIVES ENTRE RECTA I PLA

Donada la recta r:$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ i el pla $\pi: a''x+b''y+c''z+d''=0$

Obtenim els vectors $\vec{r}=\left(\vec{n}\times\overrightarrow{n'}\right)\ i\ \overrightarrow{n''}$ **NOTA**: En cas de tenir la recta en altres formes, o la passem a la forma implícita o resolem el valor del paràmetre lambda, segons convingui.

Són paral·lels 	El vector director de la recta r és perpendicular al vector normal del pla $\overrightarrow{n''}\cdot\vec{r}=0$ Per a comprovar que no són coincidents, hem de verificar que un punt de la recta NO pertany al pla
Són perpendiculars 	El vector normal del pla és paral·lel al vector director de la recta r $\overrightarrow{n''}\parallel\vec{r}$ Es tallaran en un punt: el sistema té solució

Es tallen en un punt 	El vector normal del pla NO és paral·lel ni perpendicular al vector director de la recta r $\overrightarrow{n''} \nparallel \vec{r}$ Determinarem el punt de tall amb la solució del sistema.
Són coincidents 	Si són coincidents, el vector director de la recta és perpendicular al vector normal del pla. A més a més el sistema ha de tenir infinites solucions perquè la recta forma part del pla

DETERMINACIÓ MITJANÇANT RANGS

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad M' \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right)$$

$* \ ran(M) = ran(M') = 2 \rightarrow la\ recta\ està\ continguda\ en\ el\ pla$

$* \ ran(M) = ran(M') = 3 \rightarrow La\ recta\ i\ el\ pla\ són\ secants$ (determinem amb el producte escalar si són perpendiculars o no)

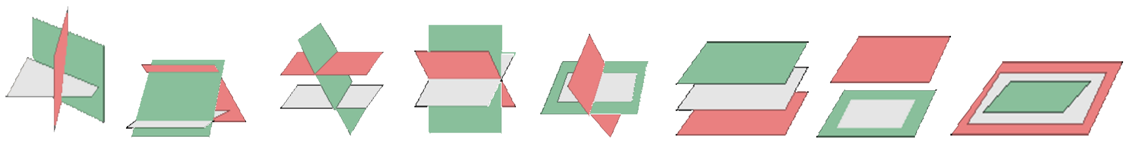
$* \ ran(M) = 2;\ \ ran(M') = 3 \rightarrow El\ pla\ i\ la\ recta\ són\ paral \cdot lels$

POSICIONS RELATIVES DE TRES PLANS

$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \qquad \beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0 \qquad \gamma: a''x + b''y + c''z + d'' = 0$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right)$$

Ran(M)	***Ran(M')***	**Coeficients**	**Posicions**
3	3		1. Plans secants en un punt
2	3	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$	2.1. Plans secants dos a dos 2.2 Dos plans paral·lels i el tercer secant
2	2	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$	3.1. Plans secants i diferents 3.2. Dos plans coincidents i un secant
1	2	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$	4.1. Plans paral·lels i diferents dos a dos 4.2. Plans paral·lels i dos coincidents
1	1		5. Plans coincidents



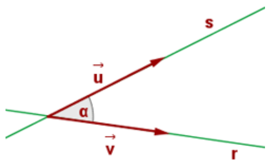
PROBLEMES MÈTRICS

MESURA D'ANGLES ENTRE RECTES I PLANS

Angle entre dues rectes

De les dues rectes, obtenim els vectors directors respectius i calculem l'angle que formen amb la fórmula següent:

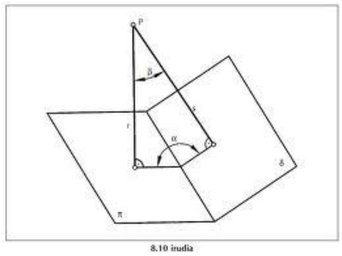
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{d}'|}$$



Angle entre dos plans

Procedim igual que amb les rectes però amb els vectors normals d'aquests

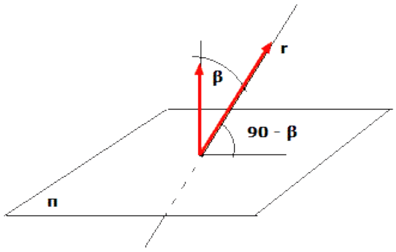
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$



Angle entre una recta i un pla

Aquí procedim igual que abans, amb el vector normal del pla i el vector director de la recta. Cal aclarir, però, que en aquest cas no trobem el cosinus de l'angle que formen sinó el cosinus de l'angle complementari, equivalent al sinus de l'angle que formen ($\sin \alpha = \cos 90 - \alpha$)

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \cos 90 - \alpha$$



DISTÀNCIA ENTRE PUNTS, RECTES I PLANS

Distància entre dos punts

Siguin els punts $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ la distància entre ambdós és igual al mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$

$$\boxed{dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distància entre un punt i una recta

És la longitud del (P-P') on P' és el punt de la recta la perpendicular de la qual passa per P.

$$dist(P, r) = dist(P, P')$$

Podem trobar la solució mitjançant TRES MÈTODES

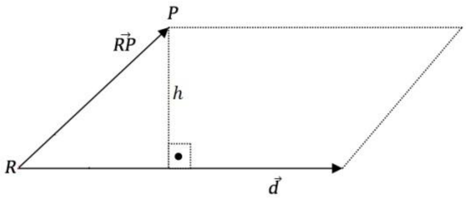
1. MÈTODE CONSTRUCTIU
   - Trobem el pla π que és perpendicular a r ($\vec{r} = \vec{n}$) i que passa per P
   - La intersecció de π amb r és el punt P'. Quan tenim les coordenades calculem el mòdul del vector $\overrightarrow{PP'}$

2. MÈTODE DEL PUNT GENÈRIC
   - El punt R genèric a la recta r té les coordenades dependents d'un paràmetre (λ). Si imposem la condició que $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r ($\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0$) obtenim el valor del paràmetre per al qual s'obté el punt P'
     Exemple:

$$r: \begin{cases} x = a' + d_1\lambda \\ y = b' + d_2\lambda \\ z = c' + d_3\lambda \end{cases} \rightarrow \quad P'(a' + \lambda d_1, b' + \lambda d_2, c' + \lambda d_3) \quad si\ P(a,b,c)$$

$$\overrightarrow{P'P}\big(a - (a' + \lambda d_1), b - (b' + \lambda d_2), c - (c' + \lambda d_3)\big) \quad \rightarrow \quad \vec{d} \cdot \overrightarrow{P'P} = 0 \rightarrow \text{ valor } \lambda$$

3. MÈTODE DEL PRODUCTE VECTORIAL
   - Ens permet calcular directament la distància, que és l'altura del paral·lelogram. Si dividim l'àrea del paral·lelogram per la seva base obtenim l'altura



$$\boxed{dist(P,r) = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}} \quad on\ \ R \in r\ \ i\ \vec{d}\ és\ el\ vector\ director\ de\ r$$

Distància d'un punt a un pla

La distància d'un punt a un pla és la distància d'aquest punt a la projecció sobre el pla. Podem fer-ho trobant la recta que passa per P i que és perpendicular al pla i, una vegada trobat el punt d'intersecció calcular-ho. No obstant això hi ha una fórmula que simplifica la tasca.

$$P(x_0, y_0, z_0) \quad \pi: ax + by + cz + d = 0 \ \rightarrow \ \boxed{dist(P,\pi) = \frac{|ax_0 + b_{y0} + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Distància d'una recta a un pla

Si la recta i el pla es tallen, la distància és zero. Si no es tallen, poden ocórrer dos coses: que la recta estigui continguda en el pla o que la recta sigui paral·lela al pla.

$\boxed{\text{Si } r \parallel \pi \text{ i P és un punt de } r \ \rightarrow \ dist(r,\pi) = \boldsymbol{dist(P,\pi)}}$

Distància entre dos plans

Si els plans es tallen, la distància és zero. Si no es tallen tenen la mateixa direcció i la distància és la d'un punt d'un dels plans a l'altre pla

$\boxed{\text{Si } \pi \parallel \pi' \text{ i P és un punt de } \pi \ \rightarrow dist(\pi,\pi') = \boldsymbol{dist(P,\pi')}}$

Distància entre dues rectes

Si les rectes són **paral·leles**, agafem un punt d'una d'elles i busquem la distància a l'altra (distància entre un punt i una recta)

Si les rectes **es tallen**, la distància **és zero**

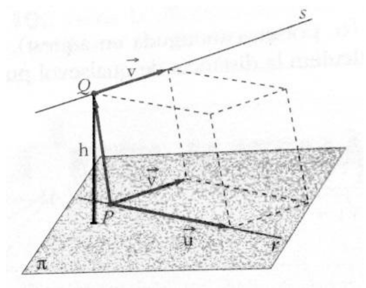
Si les rectes **es creuen**, hi ha diversos mètodes per calcular la distància a la què es troben

1. MÈTODE DEL PLA PARAL·LEL
   - Trobem el pla π paral·lel a la recta s i que conté a r.
   - Aleshores $\boxed{dist(r,s) = dist(s,\pi) = \boldsymbol{dist(P_s,\ \pi)}}$

2. MÈTODE DEL VECTOR VARIABLE
   - R és un punt variable de r. Les seues coordenades depenen de λ
   - S és un punt variable de s. Les seues coordenades depenen de μ
   - $\overrightarrow{RS}$ és un vector amb origen a r i extrem a s. Les seves coordenades depenen dels paràmetres μ i λ
   - Si imposem la condició que $\overrightarrow{RS}$ sigui perpendicular a r i a s (Productes escalars per $\overrightarrow{d_r}\ i\ \overrightarrow{d_s}$ iguals a zero) Tenim un sistema de dues equacions amb dues incògnites. Resolent obtenim els valors de λ i μ que ens permeten trobar els punts respectius a les rectes de les quals són paràmetre. Els punts els podem anomenar R_0 i S_0 de manera que la distància seria $\boxed{\left|\overrightarrow{R_0S_0}\right|}$.

3. MÈTODE DEL PRODUCTE MIXT
   - El volum del paral·lelepípede és $\left|[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}]\right|$
   - L'àrea de la base és $|\vec{u}\times\vec{v}|$
   - L'altura és la distància de Q a π, és a dir, la distància de r a s
   - Apliquem la següent fórmula

$$\boxed{dist(r,s) = dist(Q,\pi) = h = \frac{V}{A} = \frac{\left|[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}}$$



MESURA D'ÀREES I VOLUMS

Àrea d'un paral·lelogram

Mòdul del producte vectorial dels dos vectors → $|\vec{u}\times\vec{v}|$

Àrea d'un triangle ABC

½ del mòdul del producte dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ → $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

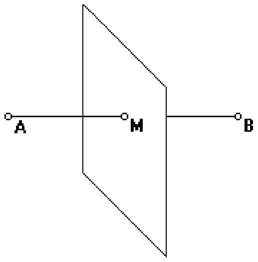
Volum d'un tetraedre del qual coneixem els vèrtex

Si sabem els vèrtex $A(x_1,y_1,x_1); B(X_2,y_2,z_2); C(x_3,y_3,z_3); D(x_4,y_4,z_4)$ determinem els vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, i $\overrightarrow{AD}$ i operem de la següent manera

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AD}\end{vmatrix}$$

LLOCS GEOMÈTRICS EN L'ESPAI

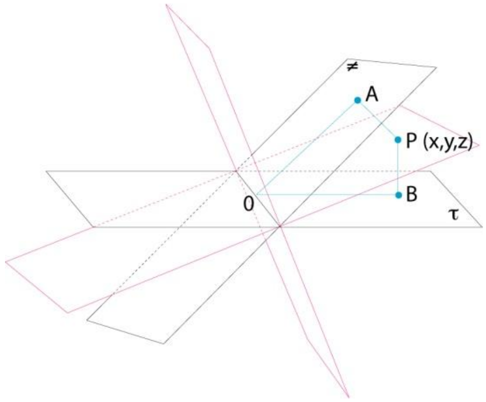
Pla mediador



El pla mediador d'un segment és el pla perpendicular a aquest en el seu punt mitjà. El lloc geomètric dels punts de l'espai que equidisten dels extrems del segment

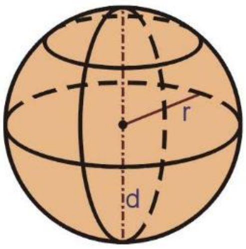
$$dist(X, A) = dist(X, B)$$

El pla bisector



El pla bisector és el que divideix un angle díedre en dos d'iguals. És el lloc geomètric dels punts que equidisten dels semiplans que formen l'angle díedre

$$dist(X, \pi) = dist(X, \pi')$$



L'esfera

És el lloc geomètric dels punts de l'espai la distància al centre del qual, Q, és constant, r.

Els punts $X(x, y, z)$ d'una superfície esfèrica de centre $Q(x_0, y_0, z_0)$ i de radi r compleixen aquesta condició: $|\overrightarrow{QX}| = r$

De manera que una esfera amb centre x_0, y_0, z_0 i radi r compleix:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Si desenvolupem l'expressió anterior, arribem a la següent expressió:

$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0}$ i d'aquí podem trobar que:

$$\boxed{centre = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) \quad \text{i radi } r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D}}$$